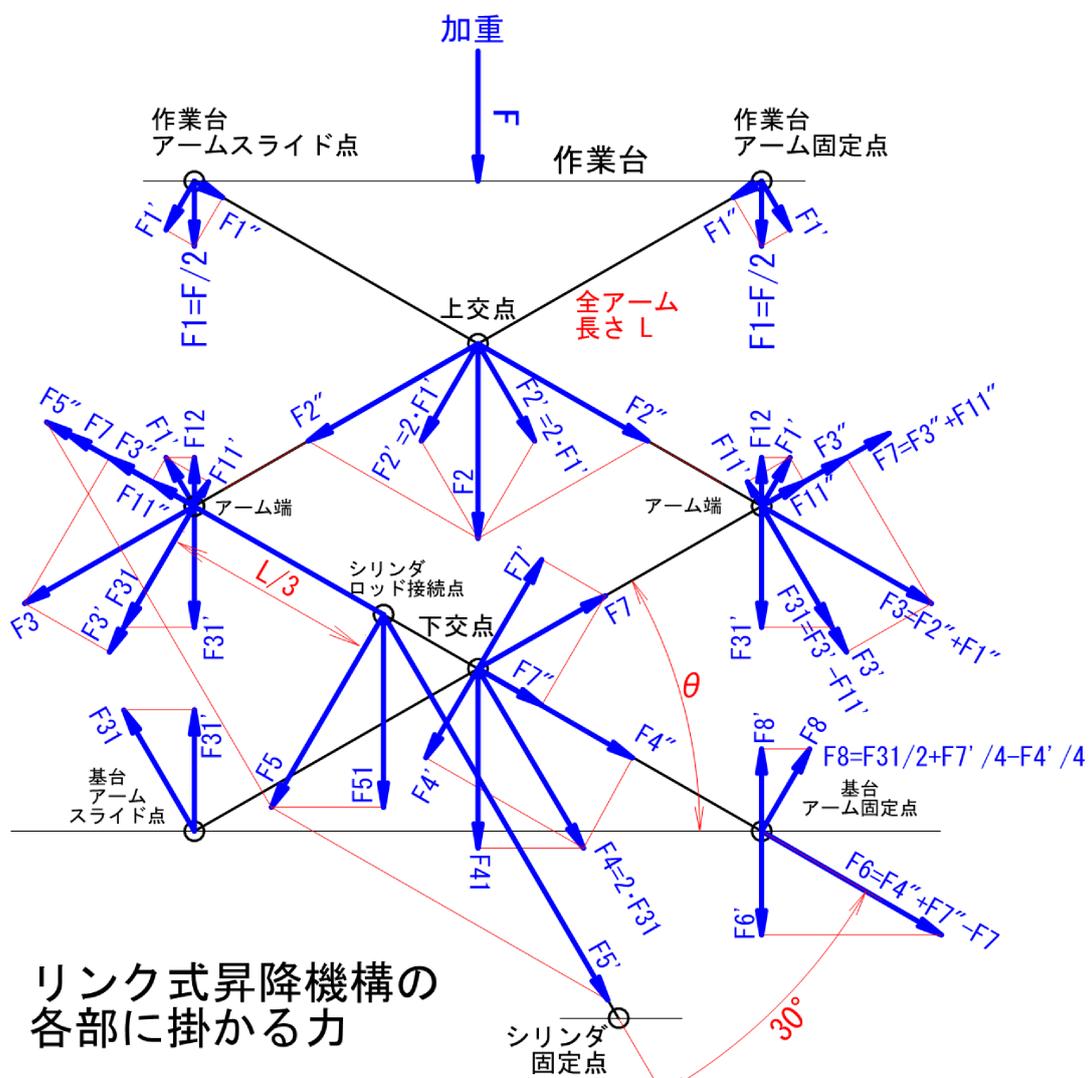


2段リンク式昇降機構の各部に掛かる力の解明

F.Denbei

2016/03/30



リンク式昇降機構の各部に掛かる力

(注 各ベクトルの文字記号は大きさを表す)

1 加重

作業台、作業台に載る人と荷物、昇降機構の全ての加重が力として作業台の中央に掛かるものとする。リンク機構は左右の対であるため一方のリンクにはその $1/2$ が掛かる。ここでは一方リンクに加わる力で考えていく。

なお、力の単位 [N] は省略する。

$$\text{一方のリンクに加わる加重の力} = F$$

2 作業台のアーム固定点とアームスライド点に掛かる力

アーム固定点とアームスライド点のそれぞれに加重の半分が掛かるとする。

$$F_1 = \frac{F}{2}$$

$$F_1' = F_1 \cos \theta = \frac{F}{2} \cos \theta$$

$$F_1'' = F_1 \sin \theta = \frac{F}{2} \sin \theta$$

3 上交点

上交点にはテコの原理による倍力が掛かる。

$$F_2' = 2F_1' = F \cos \theta$$

$$F_2 = 2F_2' \cos \theta = 2F \cos^2 \theta$$

$$F_2'' = \frac{F_2}{2 \sin \theta} = F \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$$

4 アーム端（左右リンク点） その1

上段アームの平行方向の力（外側への張力）

$$F_3 = F_2'' + F_1'' = F \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{F}{2} \sin \theta = F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{2} \right)$$

$$F_3' = F_3 \sin 2\theta = F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{2} \right) 2 \sin \theta \cos \theta = F \cos \theta (\cos^2 \theta + 1)$$

$$F_3'' = F_3 \cos 2\theta = F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{2} \right) (2 \cos^2 \theta - 1) = F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{3}{2} \sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta \right)$$

リンク点を持ち上げる方向の力

$$F_{11}' = F_1' \cos 2\theta = \frac{F}{2} \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)$$

$$F_{11}'' = F_1' \sin 2\theta = \frac{F}{2} \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta = F \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$F_{12} = F_1' \cos \theta = \frac{F}{2} \cos^2 \theta$$

5 検算 1

アーム端（左右リンク点）に掛かる鉛直方向の力の合計は F に等しい

$$F_g = 2(F_3 \sin \theta - F_{12}) = 2 \left\{ F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{2} \right) \sin \theta - \frac{F}{2} \cos^2 \theta \right\} = F$$

6 アーム端（左右リンク点） その2

下段アームの平行方向の力（外側への張力）

$$\begin{aligned} F_7 &= F_3'' + F_{11}'' = F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{3}{2} \sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta \right) + F \sin \theta \cos^2 \theta \\ &= F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{3}{2} \sin \theta \right) \end{aligned}$$

$$F_7' = F_7 \sin 2\theta = F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{3}{2} \sin \theta \right) \sin 2\theta = F(3 \cos^3 \theta - \cos \theta)$$

$$F_7'' = F_7 \cos 2\theta = F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{3}{2} \sin \theta \right) \cos 2\theta = F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{3}{2} \sin \theta \right) (2 \cos^2 \theta - 1)$$

下段アームの直角方向の力（下交点において倍力となる力点の力）

$$F_{31} = F_3' - F_{11}' = F \cos \theta (\cos^2 \theta + 1) - \frac{F}{2} \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) = \frac{3F}{2} \cos \theta$$

$$F_{31}' = F_{31} \cos \theta = \frac{3F}{2} \cos^2 \theta$$

7 下交点

下交点にはテコの原理による倍力が掛かる。

$$F_4 = 2F_{31} = 3F \cos \theta$$

$$F_4' = F_4 \cos 2\theta = 3F \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) = F(6 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

$$F_4'' = F_4 \sin 2\theta = 6F \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$F_{41} = F_4 \cos \theta = 3F \cos^2 \theta$$

8 検算 2

シリンダが無く基台のアームスライド点が基台に固定されているとしたとき、基台に掛かる鉛直方向の力の合計は F に等しい。

$$F_g = 2(F_{41} - F_7 \sin \theta - F_{31}') \\ = 2 \left\{ 3F \cos^2 \theta - F \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) - \frac{3F}{2} \cos^2 \theta \right\} \\ = F$$

9 シリンダロッド接続点に掛かる力

シリンダロッド接続点にはテコの原理による倍力が掛かる。
 ここでは計算を簡単にするために、シリンダと押し上げるアームとの角度が常に 30° で
 変わらないとした（実際には少し変化）。

$$\begin{aligned} F_5 &= \frac{3}{2}F_{31} + \frac{3}{4}F_4' - \frac{3}{4}F_7' \\ &= \frac{9F}{4}\cos\theta + \frac{3F}{4}(6\cos^3\theta - 3\cos\theta) - \frac{3F}{4}(3\cos^3\theta - \cos\theta) \\ &= \frac{3F}{4}(\cos\theta + 3\cos^3\theta) \end{aligned}$$

$$F_5' = \frac{F_5}{\sin 30^\circ} = 2F_5 = \frac{3F}{2}(\cos\theta + 3\cos^3\theta) \quad \leftarrow \text{シリンダに必要な推力はこの2倍となる}$$

$$F_5'' = \frac{F_5}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}F_5 = \frac{3\sqrt{3}F}{4}(\cos\theta + 3\cos^3\theta)$$

$$F_{51} = F_5 \cos\theta = \frac{3F}{4}(\cos^2\theta + 3\cos^4\theta)$$

10 最下段アームの固定点に掛かる力

アームの平行方向の力（固定点を押す方向の力）

$$\begin{aligned} F_6 &= F_4'' + F_7'' - F_7 \\ &= 6F\sin\theta\cos^2\theta + F\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{3}{2}\sin\theta\right)(2\cos^2\theta - 1) - F\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{3}{2}\sin\theta\right) \\ &= F(6\sin\theta\cos^2\theta - 2\sin\theta + 3\sin^3\theta) \end{aligned}$$

$$F_6' = F_6 \sin\theta = F(6\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta + 3\sin^4\theta) = 3\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^2\theta$$

アームを持ち上げる方向の力

$$\begin{aligned} F_8 &= \frac{1}{2}F_{31} + \frac{1}{4}F_7' - \frac{1}{4}F_4' \\ &= \frac{3F}{4}\cos\theta + \frac{F}{4}(3\cos^3\theta - \cos\theta) - \frac{F}{4}(6\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ &= \frac{F}{4}(5\cos\theta - 3\cos^3\theta) \end{aligned}$$

$$F'_8 = F_8 \cos \theta = \frac{F}{4} (5 \cos^2 \theta - 3 \cos^4 \theta)$$

11 最下段アームのスライド点に掛かる力

F_{31} 、 F_{31}' が持ち上げる力として掛かる。

12 検算 3

シリンダ固定点と基台に掛かる鉛直方向の力の合計は F となる。

$$\begin{aligned} F_g &= F_{51} + F_6' - F_8' - F_{31}' \\ &= \frac{3F}{4} (\cos^2 \theta + 3 \cos^4 \theta) + 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - \frac{F}{4} (5 \cos^2 \theta - 3 \cos^4 \theta) - \frac{3F}{2} \cos^2 \theta \\ &= F \end{aligned}$$

13 最下段のアームに掛かる張力

下交点とロッド接続点との間に掛かる張力

$$\begin{aligned} F_a &= F_5'' + F_7 \\ &= \frac{3\sqrt{3}F}{4} (\cos \theta + 3 \cos^3 \theta) + F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{3}{2} \sin \theta \right) \\ &= F \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{3}{2} \sin \theta + \frac{3\sqrt{3}}{4} \cos \theta + \frac{9\sqrt{3}}{4} \cos^3 \theta \right) \end{aligned}$$

下交点とアーム固定点との間に掛かる張力

$$\begin{aligned} F_b &= F_5'' + F_7' - F_4'' - F_7'' \\ &= F_5'' - F_6 \\ &= \frac{3\sqrt{3}F}{4} (\cos \theta + 3 \cos^3 \theta) - F (6 \sin \theta \cos^2 \theta - 2 \sin \theta + 3 \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

$$= F \left(2 \sin \theta - 3 \sin^3 \theta + \frac{3\sqrt{3}}{4} \cos \theta + \frac{9\sqrt{3}}{4} \cos^3 \theta - 6 \sin \theta \cos^2 \theta \right)$$

14 最下段のアームに掛かる曲げモーメント

ロッド接続点で左上がりアームに掛かる曲げモーメント（ただし、アーム全体の長さを $L[\text{m}]$ とする）

$$M_a = F_{31} \cdot \frac{L}{3} = \frac{3F}{2} \cos \theta \cdot \frac{L}{3} = \frac{FL}{2} \cos \theta [\text{Nm}]$$

下交点で右上がりアームに掛かる曲げモーメント

$$M_b = F_{31} \cdot \frac{L}{2} = \frac{3F}{2} \cos \theta \cdot \frac{L}{2} = \frac{3FL}{4} \cos \theta [\text{Nm}]$$

15 ★ 三角関数の公式 ★

今回、式の変形に使った三角関数の公式を示します。

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 1 - 2 \cos^2 \theta$$